

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra I

Blatt 10

Abgabe ihrer Lösung: Bis Donnerstag, 16. Januar 2020, 09:55 Uhr, in den Briefkasten ihres Tutors im Gebäude F4. Achten Sie auf eine saubere und lesbare Darstellung, schreiben Sie ihren Namen und den Namen ihres Tutors auf jedes Blatt und heften Sie ihre einzelnen Blätter zusammen.

Aufgabe 10.1

(5 Punkte)

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in M_{n \times n}(K)$ zunächst so, dass $AB = I_n$. Wir sagen auch, dass A linksinvers zu B ist.

- (a) Sei $X \in K^n$. Zeigen Sie, dass $BX = 0$ genau dann wenn $X = 0$. Folgern Sie, dass das lineare Gleichungssystem $BX = C$ für jedes $C \in K^n$ eine Lösung besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass A auch rechtsinvers zu B ist, d.h. $BA = I_n$ gilt.

Nun seien $A, B \in M_{n \times n}(K)$ beliebig.

- (c) Gelte $AB + A + B = 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $AB = BA$ gelten muss.

Aufgabe 10.2

(4 Punkte)

Sei K ein Körper und seien U und V endlich-dimensionale K -Vektorräume.

- (a) Geben Sie eine Basis und die Dimension des K -Vektorraums $U \times V$ an und begründen Sie ihre Antwort.
- (b) Sei W ein K -Vektorraum, der U und V enthält. Folgern Sie aus dem Dimensionssatz (Satz 18.2), dass

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) + \dim(U \cap V).$$

Aufgabe 10.3

(4 Punkte)

Sei K ein Körper, V und W endlich-dimensionale K -Vektorräume und $T: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Sei ferner $\mathcal{B}_{\ker} = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis des Kerns von T und $\mathcal{B}_{\text{im}} = \{T(u_1), \dots, T(u_m)\}$ eine Basis des Bilds von T , wobei $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $v_i, u_j \in V$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_m\}$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 10.4

(3 Punkte)

In der Vorlesung folgern wir aus dem Dimensionssatz, dass eine lineare Abbildung zwischen zwei n -dimensionalen K -Vektorräumen genau dann injektiv ist, wenn sie surjektiv ist. Widerlegen Sie diese Aussage für unendlich-dimensionale Vektorräume. Beweisen Sie hierzu, dass die Abbildung

$$\varphi: K[X] \longrightarrow K[X], \quad f = \sum_{i=0}^n a_i X^i \longmapsto f' := \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} X^i$$

für jeden Körper K der Charakteristik 0 eine lineare, surjektive und **nicht** injektive Abbildung ist.

Zeigen sie ferner, dass φ für jeden Körper K der Charakteristik ungleich 0 nicht surjektiv ist.